

# **MECÁNICA DE SÓLIDOS**

**Curso 2017/18**

**Titulación:**

**Grado en Ingeniería Mecánica**

## **Tema 3 – Plasticidad**

**Profesores:**

**Jorge Zahr Viñuela  
José A. Rodríguez Martínez**

# ***Tema 3***

## **Plasticidad**

- 3.1 CUESTIONES PREVIAS**
- 3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**
- 3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**
- 3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD**
- 3.5 TEOREMAS DE LA PLASTICIDAD**
- 3.6 PLASTICIDAD BIDIMENSIONAL**
- 3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

# *Tema 3*

## Plasticidad

3.1 CUESTIONES PREVIAS

3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN

3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD

3.5 TEOREMAS DE LA PLASTICIDAD

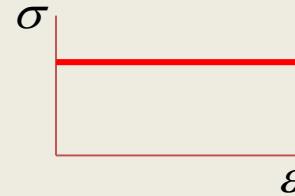
**3.6 PLASTICIDAD BIDIMENSIONAL**

3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD

## 3.6.1 Hipótesis Generales

---

- Estado tensional de *deformación plana*
- Sólido *rígido perfectamente plástico*
- El desplazamiento de un punto es *paralelo* al plano XY
- El desplazamiento de un punto en el plano XY es *independiente* de la coordenada **Z**
- Se considera, a efectos de cálculo, la velocidad en lugar del desplazamiento, vector cuyas componentes se identifican en lo que sigue como:



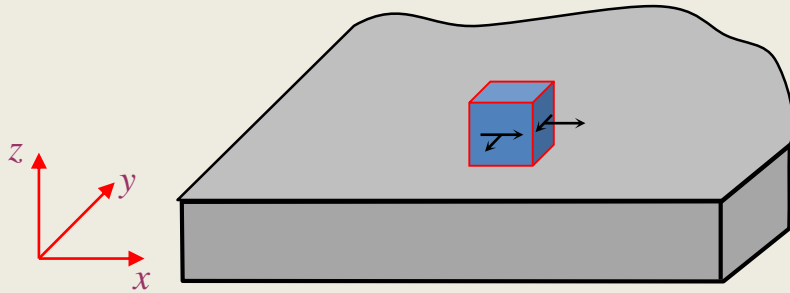
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = \dot{u}(x, y) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v} = \dot{v}(x, y)$$

# 3.6.2 Ecuaciones de la Plasticidad en Deformación Plana

a) Campo de desplazamientos (movimientos):

$$u(x, y) ; v(x, y) ; w(x, y) \longrightarrow w(x, y) = 0$$

b) Estado tenso-deformacional:



*Incógnitas:*

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} ; u, v$$

Componentes del tensor de tensiones

Movimientos

$$\varepsilon_z = 0$$

The diagram shows a cube element in its original state (solid lines) and its deformed state (dashed lines). The height of the cube remains the same, indicating zero strain in the z-direction.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

c) Ecuaciones de Equilibrio Interno:

(no se considera fuerzas de volumen)

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$
--	--	--

## 3.6.2 Ecuaciones de la Plasticidad en Deformación Plana

(2/5)

### d) Deformaciones infinitesimales como “velocidad de deformación”:

Introduciendo el **tiempo** como **variable de apoyo**, las ecuaciones que dan la relación **deformación vs gradiente de desplazamiento**, pueden escribirse en términos de **velocidad de deformación vs gradiente de velocidad** :

$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$	$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right)$
$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}$	$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) = 0$
$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = 0$	$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) = 0$

Se incluye aquí la condición de **deformación plana** en las componentes pertinentes.

## 3.6.2 Ecuaciones de la Plasticidad en Deformación Plana

(3/5)

e) Ecuaciones de Prandtl-Reuss:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^{pl}}{s_{ij}} = d\lambda = \frac{d\varepsilon_{ij}}{s_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = s_{ij} \dot{\lambda}$$

En particular, por la condición de **deformación plana**, se tiene:

Esto es así por la hipótesis de material **rígido perfectamente plástico**.

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} = \tau_{yz} \dot{\lambda} = 0 \\ \dot{\gamma}_{xz} = \tau_{xz} \dot{\lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_z \text{ es una } \mathbf{tensión principal!!} \\ \bullet \quad & \dot{\varepsilon}_z = s_z \dot{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = -p + 0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -p$$

$$\Rightarrow s_x = \sigma_x + p = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$$

$$s_y = \sigma_y + p = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) = -s_x$$

## 3.6.2 Ecuaciones de la Plasticidad en Deformación Plana

(4/5)

Además:

$$\bullet \dot{\varepsilon}_{ij} = s_{ij} \dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}}{(\sigma_y - \sigma_x)/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{2\tau_{xy}}{\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varepsilon}_y$$

Lo cual es compatible con el hecho conocido de que la deformación plástica volumétrica es **nula**.

En efecto:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{vol}} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_x + (-\dot{\varepsilon}_x) + 0 = 0$$



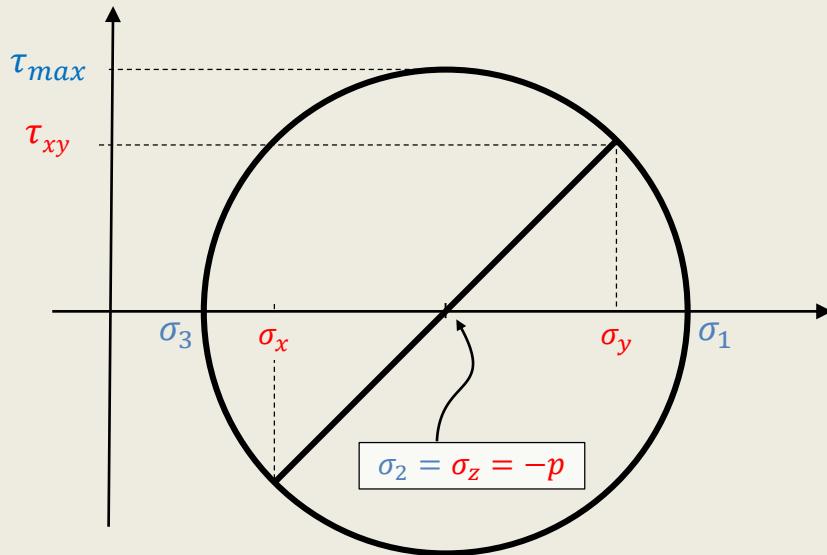
## 3.6.2 Ecuaciones de la Plasticidad en Deformación Plana

(5/5)

### f) Criterio de Plastificación:

“El material plastifica cuando la tensión de cortadura máxima  $\tau_{max}$  alcanza un cierto valor crítico  $k$ , propiedad del material”

De acuerdo a lo obtenido anteriormente a partir de las ecuaciones de **Prandtl-Reus** más la condición de **deformación plana**, se tiene el siguiente círculo de Mohr:



En esta condición, la tensión de cortadura máxima se obtiene de:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Con lo cual, el criterio de plastificación  $\tau_{max} \leq k$  se puede reescribir como:

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 = k^2$$

$k$  representa una **tensión tangencial de plastificación**, que puede determinarse de un ensayo en **cortante puro**.

Si el parámetro  $k$  se ajusta de acuerdo a:  $k = \frac{\sigma_Y}{2}$ , el criterio anterior se hace equivalente a:

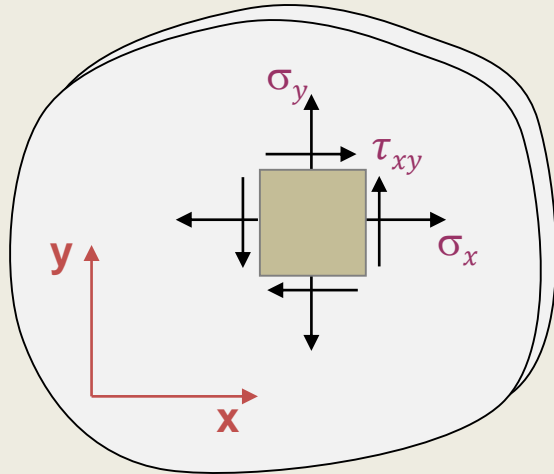
**TRESCA + Deformación Plana.**

Si el parámetro  $k$  se ajusta de acuerdo a:  $k = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$ , el criterio anterior se hace equivalente a:

**Von MISES + Deformación Plana.**

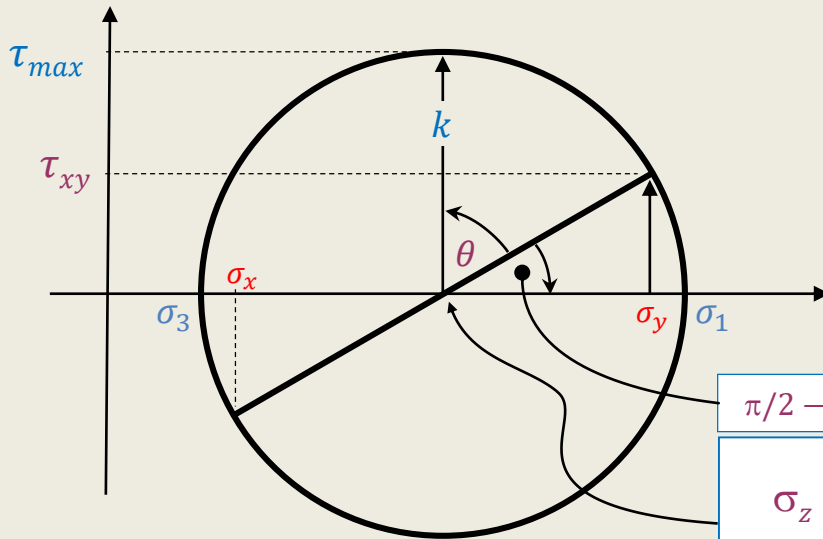
### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

*Estado tensional en un punto que haya plastificado.-*

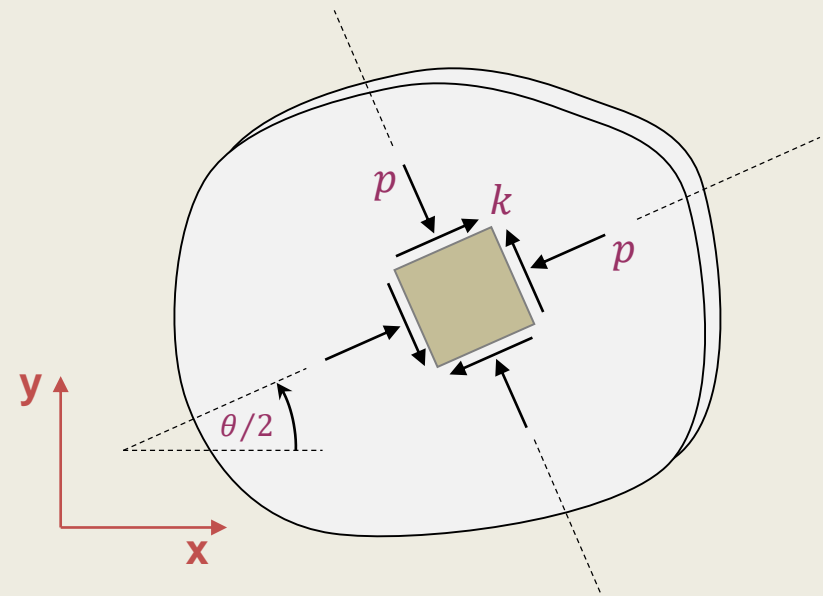


- 1) ¿ En qué dirección la **tensión de cortadura** es máxima (e igual a  $k$ ) ?
- 2) ¿ Cómo es el **estado tensional** en estas direcciones de máxima cortadura ?

Círculo de Mohr:



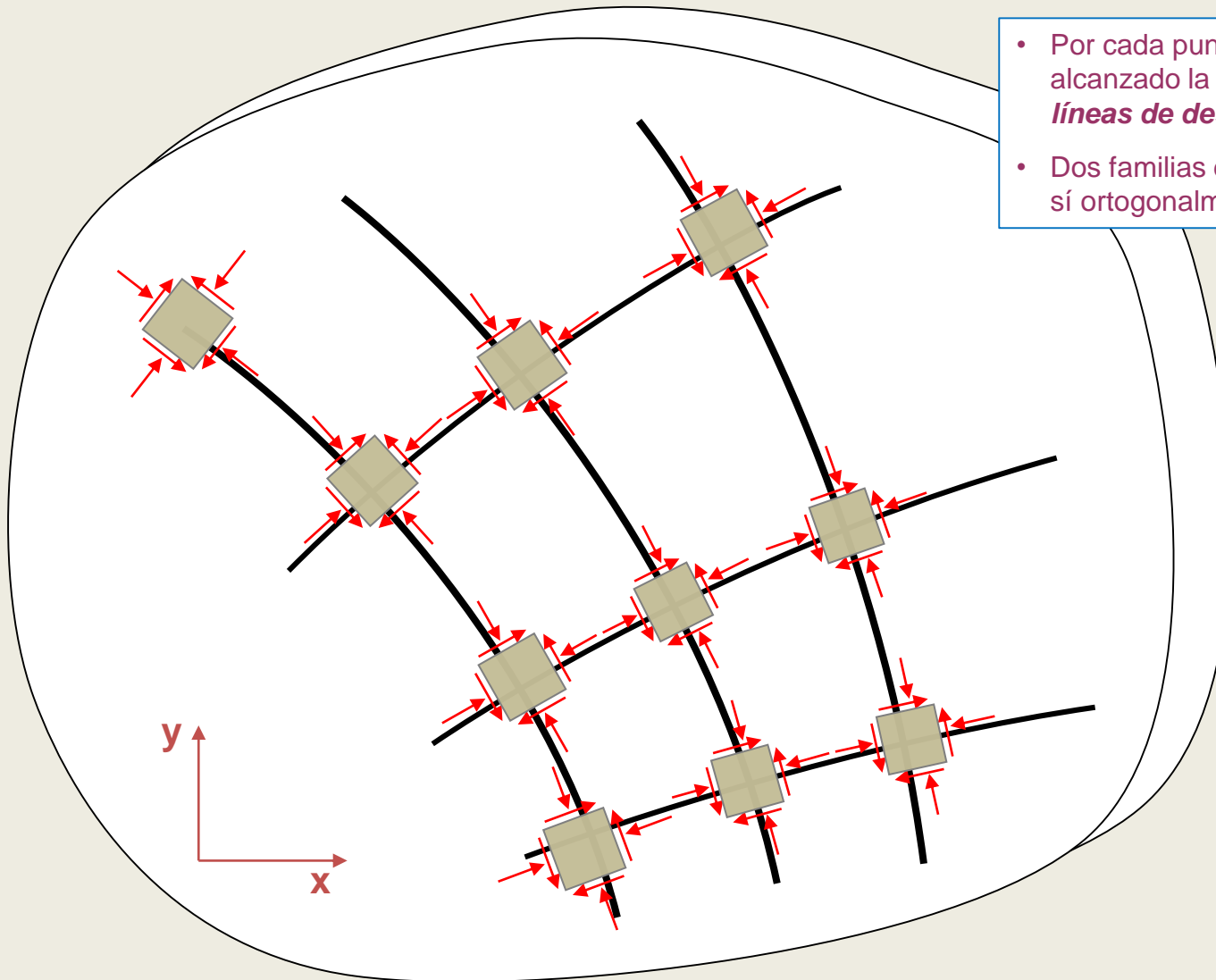
$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -p$$



### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

(2/7)

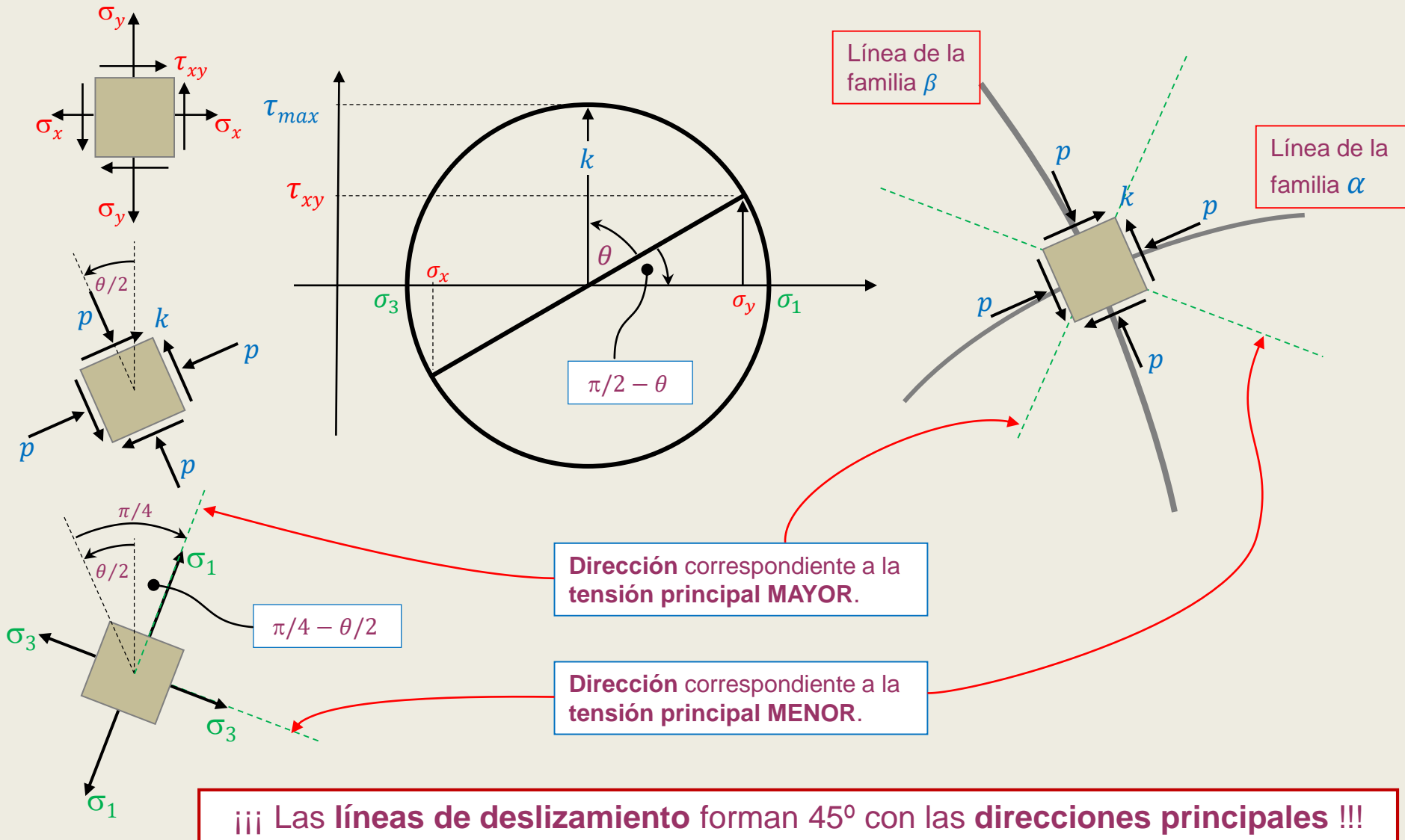
*Las líneas de deslizamiento como envolventes de direcciones de plastificación.-*



- Por cada punto del sólido en el que se haya alcanzado la plastificación pasan **dos** *líneas de deslizamiento*
- Dos familias de líneas que se cortan entre sí ortogonalmente

### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

*Convenio para identificar las dos familias de líneas de deslizamiento.-*



### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

(4/7)

!!!Las líneas de deslizamiento forman  $45^\circ$  con las direcciones principales!!!

- En las direcciones paralela y perpendicular a las líneas de deslizamiento, las componentes normales del tensor de tensiones **NO son nulas**.
- De hecho, son iguales a  $-p$ .

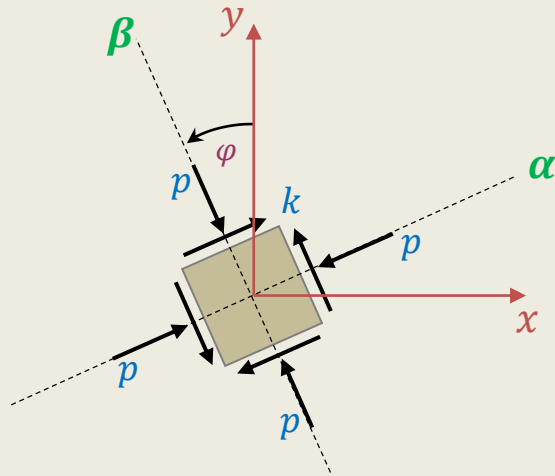
Además, puede demostrarse que

- En las direcciones paralela y perpendicular a las líneas de deslizamiento, las componentes normales del tensor de deformaciones **SON nulas**.

### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

(5/7)

¿Cómo varía  $p$  a lo largo de una línea de deslizamiento?: Ecuaciones de Hencky.-



Ecuaciones de equilibrio en los ejes  $x$  e  $y$ :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Del círculo de Mohr:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p - k \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \sigma_y &= -p + k \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \tau_{xy} &= k \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

Substituyendo en (1):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} - 2k \cos(2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2k \operatorname{sen}(2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x} - 2k \cos(2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2k \operatorname{sen}(2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Si se plantean las ecuaciones de equilibrio interno directamente en los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  (es decir, considerando  $\varphi = 0$ ), las ecuaciones (3) resultarían:

$$-\frac{\partial p}{\partial \alpha} - 2k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{\partial(p + 2k\varphi)}{\partial \alpha} = 0$$

$p + 2k\varphi = cte$  a lo largo de las líneas  $\alpha$

$$-\frac{\partial p}{\partial \beta} + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\frac{\partial(p - 2k\varphi)}{\partial \beta} = 0$$

$p - 2k\varphi = cte$  a lo largo de las líneas  $\beta$

**Ecuaciones de Hencky**

### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

*Primer teorema de Hencky.-*

$$p_A + 2k\varphi_A = p_B + 2k\varphi_B$$

$$p_C - 2k\varphi_C = p_B - 2k\varphi_B$$

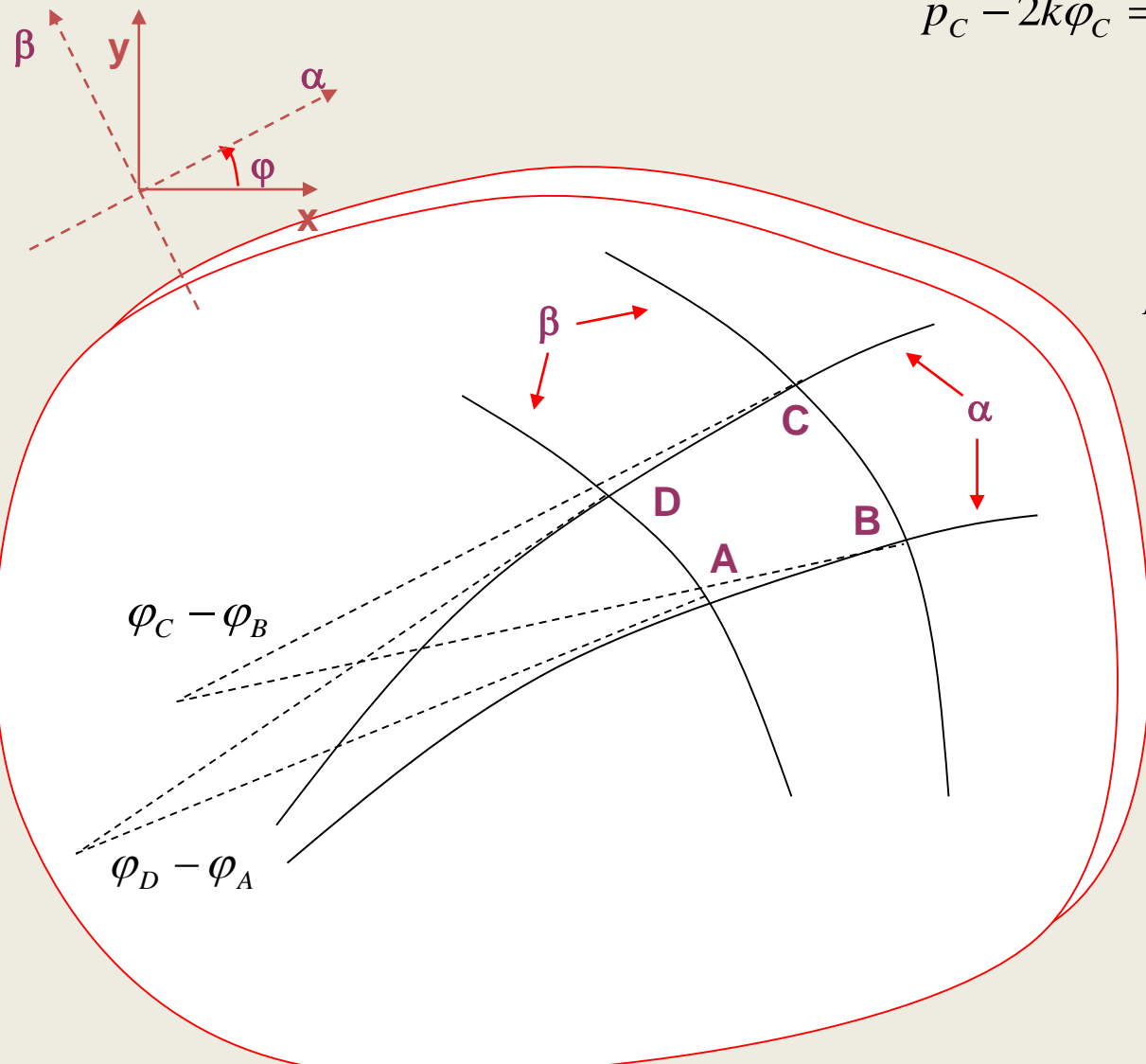
$$p_C - p_A = 2k(\varphi_A + \varphi_C - 2\varphi_B)$$

$$p_C + 2k\varphi_C = p_D + 2k\varphi_D$$

$$p_A - 2k\varphi_A = p_D - 2k\varphi_D$$

$$p_C - p_A = 2k(2\varphi_D - \varphi_C - \varphi_A)$$

$$\varphi_C - \varphi_B = \varphi_D - \varphi_A$$



Heinrich Hencky  
(1885-1951)

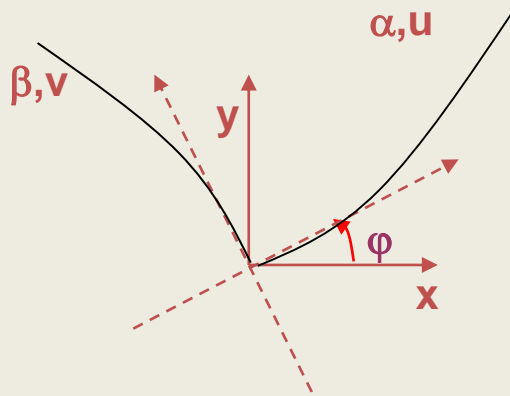


### 3.6.3 Líneas de Deslizamiento

(7/7)

#### Ecuaciones de Geiringer.-

De un modo similar a como se obtuvieron las ecuaciones de Hencky se pueden obtener ecuaciones en las que se relacione la velocidad



Llamando  $\dot{u}_\alpha$  y  $\dot{v}_\beta$  a las componentes de la velocidad del elemento en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente:

$$\dot{u} = \dot{u}_\alpha \cos \varphi - \dot{v}_\beta \sin \varphi$$

$$\dot{v} = \dot{u}_\alpha \sin \varphi + \dot{v}_\beta \cos \varphi$$

Si la dirección  $x$  se hubiese escogido de tal manera que el eje  $x$  fuera tangente a la línea  $\alpha$  en el punto  $O$  ( $\varphi = 0$ ):

$$\left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)_{\varphi=0} = \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} - \dot{v}_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Puesto que  $\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$  es cero a lo largo de una línea de deslizamiento:

$$\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x} - \dot{v}_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \longrightarrow d\dot{u}_\alpha - \dot{v}_\beta d\varphi = 0 \text{ a lo largo de una línea } \alpha$$

Del mismo modo:  $d\dot{u}_\alpha + \dot{v}_\beta d\varphi = 0$  a lo largo de una línea  $\beta$



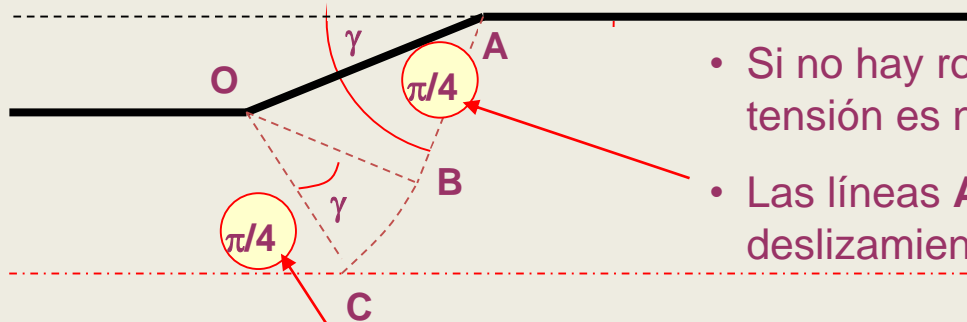
Hilda Geiringer  
(1893-1973)



### 3.6.4 Líneas de Deslizamiento: Un Ejemplo

**Un ejemplo.-**

Considérese un proceso de extrusión a través de una hilera de ángulo  $\gamma$  y en el que no hay rozamiento del material con la hilera



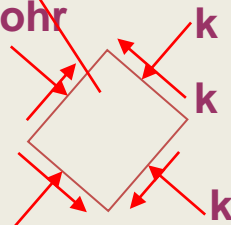
- Si no hay rozamiento sólido-hilera, a lo largo de **OA** la tensión es normal a **OA**
- Las líneas **AB** y **OB** son, por tanto, líneas de deslizamiento

**Estado tensional en C**

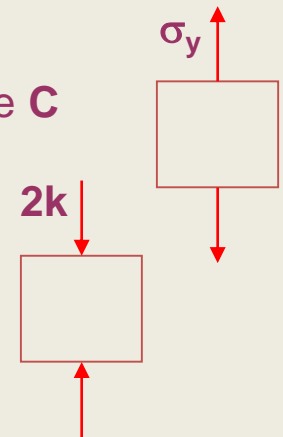
El material fluye libremente de la hilera por lo que la presión a la izquierda de **C** es **nula**  $\therefore \sigma_x = 0$ . Además, por simetría respecto al eje, **no hay** tensión tangencial,  $\tau_{xy} = 0$ .

$$\cancel{\tau_{xy}^2} + \frac{(\cancel{\sigma_x} - \sigma_y)^2}{4} = k^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_y = -2k$$

Aplicando el círculo de Mohr

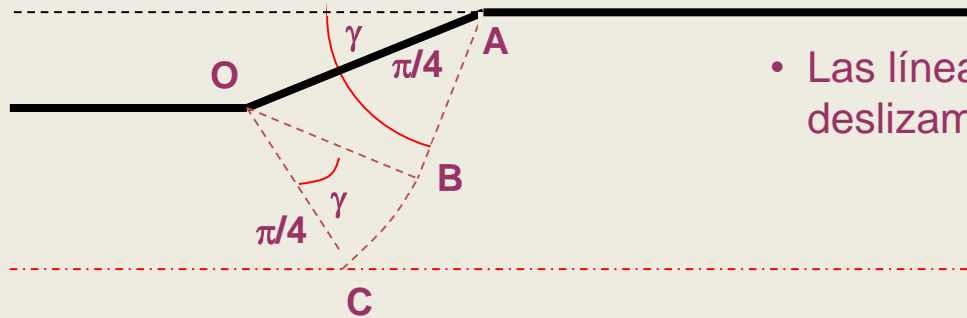


- **OC** es línea de deslizamiento **tipo  $\alpha$**  ( $\sigma_x=0$ ) es la tensión principal mayor
- **CB** es línea de deslizamiento **tipo  $\beta$**



### 3.6.4 Líneas de Deslizamiento: Un Ejemplo

Un ejemplo (Cont.)-



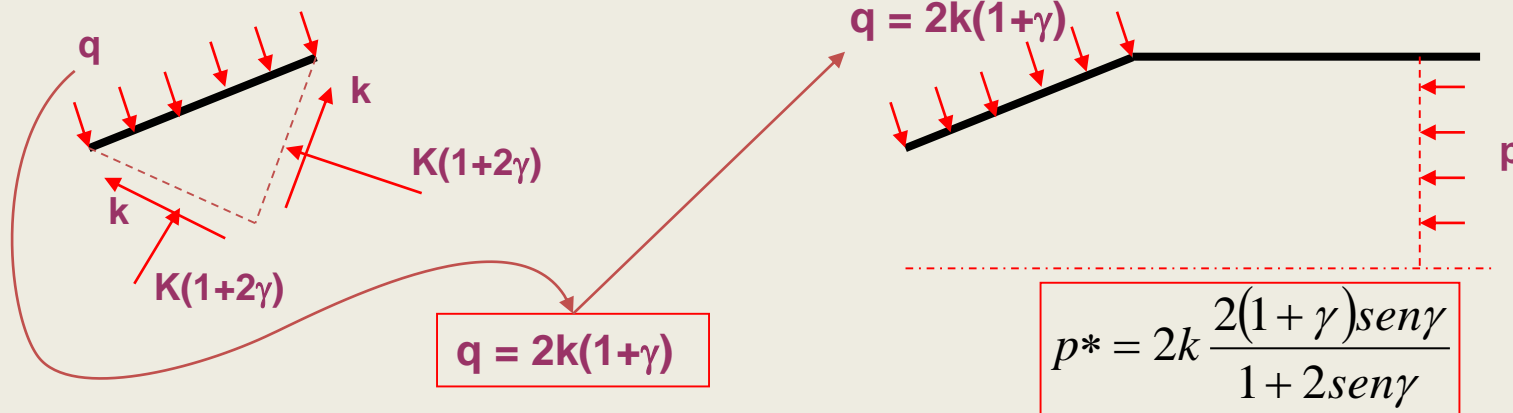
- Las líneas **OB** y **AB** son líneas de deslizamiento

Aplicación de las ecuaciones de Hencky:

En **C** el segmento curvo **CB** forma  $\varphi_C = 45^\circ$  con el eje de extrusión y en **B** el segmento curvo **CB** forma  $\varphi_B = 45 + \gamma$  con el eje de extrusión

$$p_B - 2k\varphi_B = p_C - 2k\varphi_C \quad \rightarrow \quad p_B = p_C + 2k(\varphi_B - \varphi_C) = k + 2k\gamma = k(1 + 2\gamma)$$

Equilibrio de fuerzas:



$$q = 2k(1 + \gamma)$$

$$p^* = 2k \frac{2(1 + \gamma)\text{sen}\gamma}{1 + 2\text{sen}\gamma}$$